

## 2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）：\_\_\_\_\_

我们的报名参赛队号为（8 位数字组成的编号）：\_\_\_\_\_

所属学校（请填写完整的全名）：\_\_\_\_\_

参赛队员（打印并签名）：1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）：\_\_\_\_\_

（论文纸质版与电子版中的以上信息必须一致，只是电子版中无需签名。以上内容请仔细核对，提交后将不再允许做任何修改。如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

日期：\_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：\_\_\_\_\_

## 2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

### 编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人										
评 分										
备 注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

# 创意平板折叠桌

**摘要：**平板折叠桌问题实际是一个与几何学及结构力学相关的问题，桌子的折叠过程就是一个可变形几何体的旋转变化过程，并具有重要特点：一是桌腿旋转的联动性，二是每条桌腿旋转所在平面都是相互平行的，不会发生扭转。所以可使用正投影方法找到所要的加工参数。具体方法是：

模型（1）：给定部分参数的圆形折叠桌最优参数设定。

在已知长方形平板尺寸、每根本条宽度、钢筋固定点及折叠后桌子高度条件下，以平板料余料最少为最优设计目标，确定圆形折叠桌圆面直径为 50cm。在以上给定设计参数情况下，可根据最外侧桌腿与桌面的夹角  $\beta_1$  ( $0^\circ \leq \beta_1 \leq 73.32^\circ$ )，确定其它桌腿的对应角度和桌脚边缘线的曲线方程，并给出了在  $\beta_1=73.32^\circ$ （折叠后）时，桌脚边缘线的具体曲线方程及相应的拟合方程。而让最外侧桌腿的折叠角度从  $0^\circ$ （平铺）至  $73.32^\circ$ （折叠后）变化，通过模拟和计算，可获得除最外侧桌腿的其余桌腿的开槽长度，并通过 MATLAB 模拟，给出了相应的 6 个动态变化过程图。

模型（2）：多性能指标优化的圆形折叠桌最优设计加工参数设定。

对于性能指标“产品稳固性好”而言，由于视频展示的折叠桌是空间可展几何体，因此从空间可展几何体的结构力学进行分析，通过受力分析，发现最大稳定度仅与外侧桌腿长和设计高度有关。

对性能指标“加工方便”而言，由于切割形成桌腿等操作易于实现，而开槽操作较困难，故以所有桌腿开槽总长度最短为优化目标，可得到平板尺寸、钢筋位置、开槽长度等加工参数。

对性能指标“用材最少”采用分层优化策略，第一层要找加工桌面的平板尺寸，而这已在“加工方便”指标求解时解决，第二层优化则是在大平板材料上尽可能多地获得折叠桌尺寸的小块平板材料。

另外，还可将该问题看成一个多目标优化问题，通过建立优化方程和约束条件，利用理想点法（TOPSIS）构造多目标规划模型进行求解。

对于桌高 70 cm，桌面直径 80 cm 的情形，我们确定的最优设计加工参数，并给出了该参数下折叠桌的 8 个动态变化过程图。

模型（3）：面向客户定制的折叠桌最优参数设定。

由于客户要求的任意性增加了设计难度，但通过模型（2）中的求解策略，当桌面形状的方程和桌面高度确定时，也可确定相关的最优设计加工参数。根据我们建立的数学模型，以椭圆型折叠桌为应用实例进行了验证。

以上方法能够很好确定三种情况下的折叠桌的最优参数，可以满足该公司的设计要求和客户需要，通过计算机仿真实验和实例验证，说明了所建数学模型的有效性。

**关键词：**折叠桌；最优设计；稳固性；客户定制

## 1. 问题的重述

某公司生产一种可折叠的桌子，桌面呈圆形，桌腿随着铰链的活动可以平摊成一张平板（如图 1-2 所示）。桌腿由若干根木条组成，分成两组，每组各用一根钢筋将木条连接，钢筋两端分别固定在桌腿各组最外侧的两根木条上，并且沿木条有空槽以保证滑动的自由度（见图 3）。桌子外形由直纹曲面构成，造型美观。附件视频展示了折叠桌的动态变化过程。

试建立数学模型讨论下列问题：

1. 给定长方形平板尺寸为  $120\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ ，每根木条宽  $2.5\text{ cm}$ ，连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置，折叠后桌子的高度为  $53\text{ cm}$ 。试建立模型描述此折叠桌的动态变化过程，在此基础上给出此折叠桌的设计加工参数（例如，桌腿木条开槽的长度等）和桌脚边缘线（图 4 中红色曲线）的数学描述。

2. 折叠桌的设计应做到产品稳固性好、加工方便、用材最少。对于任意给定的折叠桌高度和圆形桌面直径的设计要求，讨论长方形平板材料和折叠桌的最优设计加工参数，例如，平板尺寸、钢筋位置、开槽长度等。对于桌高  $70\text{ cm}$ ，桌面直径  $80\text{ cm}$  的情形，确定最优设计加工参数。

3. 公司计划开发一种折叠桌设计软件，根据客户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数，使得生产的折叠桌尽可能接近客户所期望的形状。你们团队的任务是帮助给出这一软件设计的数学模型，并根据所建立的模型给出几个你们自己设计的创意平板折叠桌。要求给出相应的设计加工参数，画出至少 8 张动态变化过程的示意图。



图 1



图 2



图 3



图 4

## 2. 问题的分析

首先，从折叠桌相关设计参数和参考样品的折叠视频分析，本问题实际是一个与几何学及结构力学相关的问题。在视频中展示的是一个可变形状几何体的旋转变化过程；但是在这个旋转变化过程中，有几个重要特点：其一是钢筋及外侧桌腿所在平面绕其与桌面相接处直线旋转，其他腿及钢筋在平面绕其相应与桌面相接断点处联动旋转；其二是每条桌腿旋转所在平面都是相互平行的，不会发生扭转，腿长及桌面板长没有发生变化，变化的仅仅是各腿绕其相应与桌面相接断点处旋转的角度，除支地腿外其余腿在开槽里运动（拉升或缩短）。所以从以上分析，可以使用正投影方法，把每条腿长及对应腿的桌面板都投影到同一个面上，计算相应的腿长、桌面板长及其相应与桌面相接断点处旋转的角度。具体方式见本文第 4 部分的图 1—5 所示的处理方法。

其次，关于稳固性的分析。由于本问题实际是一个与几何学及结构力学相关的问题，从几何角度看，几何体构成固定三顶点的三角形时最为稳固，而本问题的旋转都在自己相应的平面内，于是使用正投影方法，把每条腿长及对应腿的桌面板都投影到同一个面上，一旦桌子放稳，钢筋应该被牢固卡定，钢筋投影应看成三角形一主要受力顶点；从力学角度看三角形一顶点受力时，其相连两边等长时受力均匀，不等长时受力不均匀，力的平衡有使得其向受力均匀变化的趋势，故当可变化成为一个等腰三角形时最为稳固，于是可以将纵向最长桌面板与相应腿的夹角余弦定义为稳固度，其最大值是  $l_1$ （纵向最长桌面板长的/4）与  $l_2$ （钢筋及外侧桌腿与桌面相接处长）之比，具体分析见后文。

从美学角度看，其桌面俯视图应该是四个支地脚构成四边形的最大内切圆时，有较好的美观度。

### 3. 模型的假设与符号的说明

#### 3.1 模型假设

- （1）每根木条与桌面接会处的铰链及缝隙忽略，钢筋视为一条线段，其粗细忽略。每根木条的厚度忽略，但在计算桌面离地高度时要计算在内。
- （2）数学描述中，每根木条视为一条线段，折叠时呈折线。
- （3）在作图过程中，为保证实际效果，每根木条视为一矩形。

#### 3.2 符号说明

由于有两组桌腿，不失一般性或者不特别说明时，只研究其中一组即可。以下木条涉及长度时，单位为厘米（cm）。具体的符号说明如下：

$a$ ：木板长度；

$b$ ：木板宽度；

$t_0$ ：木板厚度（thickness）；

$h$ ：不计板材厚度时，折叠桌桌面（下底面）离地面的净高度，简称桌面高度；显然实际桌面高度应为  $h$  与板材厚度之和。

$\beta_i$ ：第  $i$ （ $i=1,2,\dots,n$ ）根桌子腿与圆桌面的夹角， $n$  为一组桌子腿的总数目；以两组桌腿中的最外侧桌腿（两根）摆放在人面前，以离人最近的桌腿编号为 1，其它依次排列；

$m_i$ ：第  $i$ （ $i=1,2,\dots,n$ ）根桌子腿开槽长度

$A_i, A'_i$ : 第  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 根桌子腿与桌面的截断处标识为  $A_i$ , 相应此根桌子腿的另一端 (末端) 记为  $A'_i$ , 所以第  $i$  根桌子腿可记为  $A_i A'_i$ 。同时, 记  $A_i$  的坐标为  $(x_i, y_i)$ 。

$M_i, M'_i$ : 在桌子整体完全展平情况下, 当前一组桌子腿的固定钢筋与第  $i$  根桌子腿  $A_i A'_i$  的交点, 显然  $M_1$  与  $M_n$  分别是两个最外侧桌子腿钢筋的固定点。 $M'_i$  表示由点  $M_i$  开始, 沿第  $i$  根桌子腿由  $A_i$  至  $A'_i$  方向开槽的未端点。显然,  $M_i M'_i$  为所开槽的长度。

$B_i$ : 在桌子整体完全展平情况下, 第  $i$  根桌子腿  $A_i A'_i$  向两组桌子腿对称性线方向延长时的交点。显然,  $2 A_i B_i$  是折叠桌的长度 (简记为  $a$ ), 则线段  $A_i B_i$  的长度  $y_i$ 。

$l$ : 表示沿  $A_1$  到  $B_1$  方向上长度为  $l$  的地方, 作为钢筋固定的位置。

## 4. 模型的建立与求解

### 4.1 模型 (1): 给定部分参数的圆形折叠桌最优参数设定

#### 4.1.1 模型 (1) 的分析

由前述分析, 视频展示的是一个可变形状几何体的旋转变化过程; 但是在这个旋转变化过程中, 有几个重要特点: 其一是钢筋及外侧桌腿所在平面绕其与桌面相接处直线旋转, 其他腿及钢筋在平面绕其相应与桌面相接断点处联动旋转, 主旋转角 (外侧桌腿与桌面) 为核心参数; 其二是每条桌腿旋转所在平面都是相互平行的, 不会发生扭转! 腿长及桌面板长没有发生变化, 变化的仅仅是各腿绕其相应与桌面相接断点处旋转的角度和除支地腿外其余腿在开的槽里的运动 (拉升或缩短)。所以从以上分析, 可以使用正投影方法, 把每条腿长及对应腿的桌面板都投影到同一个面上, 计算相应的腿长、桌面板长、开的槽长及其相应与桌面相接断点处旋转的角度; 由主旋转角 (外侧桌腿与桌面) 及开的槽长为核心参数, 建立描述此折叠桌动态变化过程的模型。

在给定长方形平板尺寸为  $120\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ , 每根木条宽  $2.5\text{ cm}$ , , 连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置, 并且折叠后桌子高度为  $53\text{ cm}$  情况下, 以平板料余料最剩为最优设计目标, 确定圆形折叠桌圆面直径为  $50\text{ cm}$ 。在以上给定设计参数情况下, 可根据最外侧桌腿与桌面的夹角  $\beta$  ( $0^\circ \leq \beta \leq 73.32^\circ$ ), 确定其它桌腿的对应角度和桌脚边缘线的曲线方程, 并给出了在  $\beta = 73.32^\circ$  (折叠后) 时, 桌脚边缘线的具体曲线方程及相应的拟合方程。而让四条最外侧桌腿的折叠角度  $\beta$  从  $0^\circ$  (平铺) 至  $73.32^\circ$  (折叠后) 变化, 则可以模拟桌腿及固定钢筋的动态变化过程, 从而获得除最外侧桌腿的各个木条腿的开槽长度。

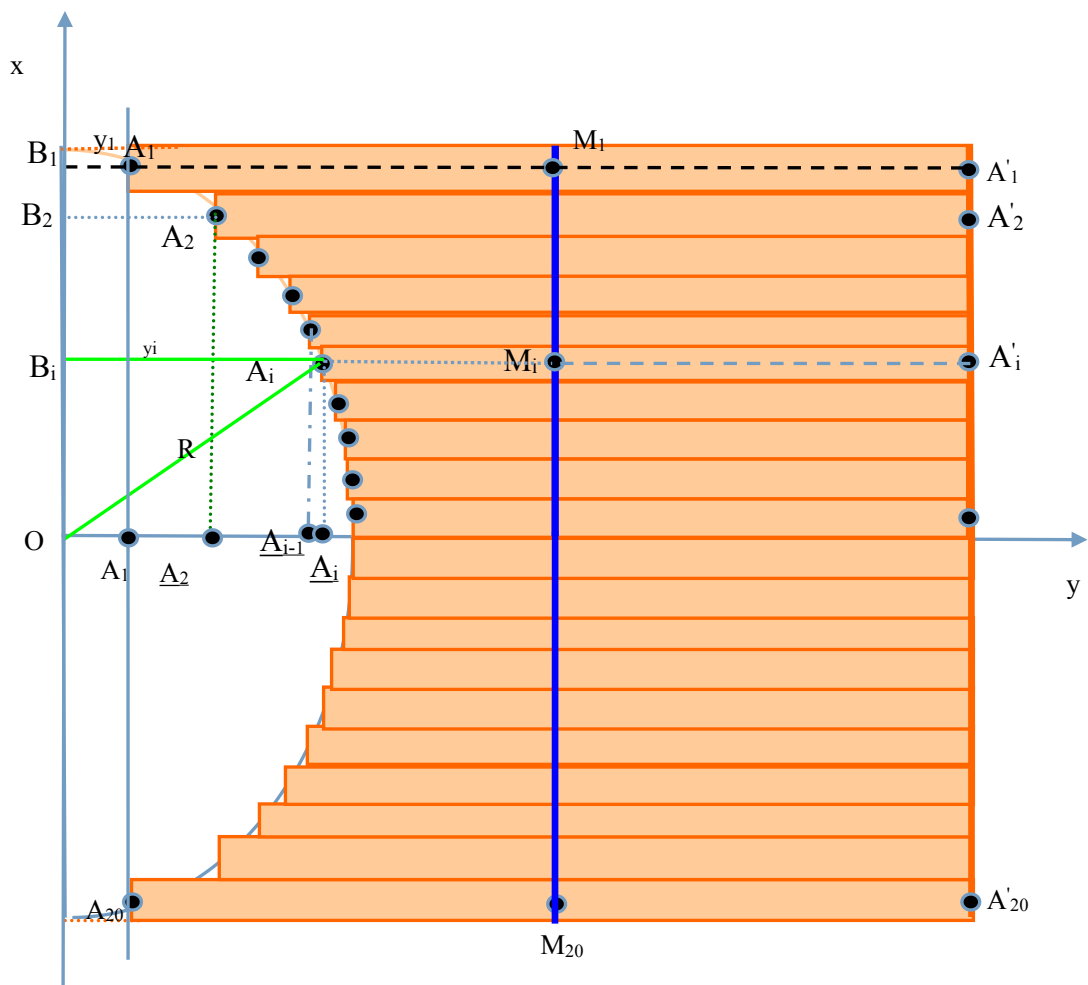


图 1 圆面折叠桌在展平时桌腿与切面情况及坐标选取

图 1 为圆面折叠桌在展平时桌腿与切面的情况，并在此图建立了具体的坐标，具体的符号含义见前面的符号说明。实际上，这里仅画出了一半桌子，另一半桌子沿  $x$  轴方向与图示桌子对称，且在折叠过程中，其形状变化也是对称的，所以不失一般性，我们仅研究图示的一半桌子。

将图 1 的二维坐标系放置到折叠后的桌子上，并以垂直向下为方向  $z$  为轴方向，则得到图 2 的实物上的三维坐标系，各个数学符号标识如图 2 所示。







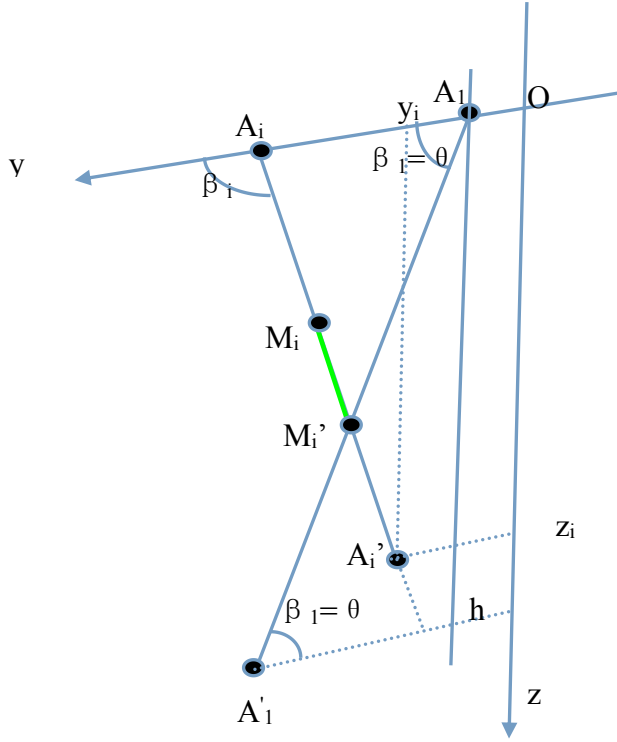


图 4 第  $i$  根桌子腿与第 1 根桌子腿正投影的简化图

图 4 展示了第  $i$  根桌子腿与第 1 根桌子腿正投影的简化图，其中点的标注仍然沿用图 3 中标注方法。

#### 4.1.2 模型 (1) 的建立

根据前面的分析和图示（注意， $O$  为  $B_i$  的投影点  $A_i$  指  $A_i$  的投影点，其余类似），可以建立我们所期望的数学模型（注意下面的  $n=20$ ）。

- (1) 记  $A_i$  到坐标原点  $O$  的距离为  $R$ ，并记图 1 中点  $A_i$  的坐标为  $(x_i, y_i)$ ，则有：

$$x_i = \frac{a}{2} - \left(\frac{b}{n}i + \frac{b}{2n}\right), \quad y_i = f(x_i) = \sqrt{R^2 - X_i^2} \quad i=1,2,\dots,n \quad (4-1)$$

- (2)  $A_i B_i$  的计算。将图 1 中的将线段  $A_i B_i$  简记为  $y_i$ ，可知：

$$A_i B_i = y_i = f(x_i) \quad i=1,2,\dots,n \quad (4-2)$$

- (3)  $A_i A'_i$  的计算。第  $i$  个桌腿的长度为：

$$A_i A'_i = \frac{b}{2} - y_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (4-3)$$

- (4) 开槽  $M_i M'_i$  的计算。此处计算根据图 5 进行，可知：

$$M_i M'_i = A_i M'_i - A_i M = A_i M'_i - l$$

其中：

$$l = (b/2 - y_1)/2$$

$$A_i M_i' = \sqrt{(OA_i - OA_1)^2 + A_1 M_i'^2 - 2 A_1 M_i' (OA_i - OA_1) \cos \beta_1}$$

$l$  为  $A_1$  到钢筋固定的位置的长度，在本模型中钢筋固定点为最外侧桌腿的一半，但为使模型具有一般性，我们记  $A_1 M_i' = l$ 。而  $OA_i = y_i$ ， $OA_1 = y_1$ （注意由图 5 中所示）所以有：

$$A_i M_i' = \sqrt{l^2 + (y_i - y_1)^2 - 2l(y_i - y_1) \cos \theta}$$

于是第  $i$  个开槽长度为：

$$M_i M_i' = \sqrt{l^2 + (y_i - y_1)^2 - 2l(y_i - y_1) \cos \theta} - l$$

由于有：

$$\sin \beta_1 = \sin \theta = h / A_1 A_1' = h / (b/2 - y_1) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

所以有： $\theta = \arcsin(h / (b/2 - y_1))$ ，于是：

$$M_i M_i' = \sqrt{l^2 + (y_i - y_1)^2 - 2l(y_i - y_1) \cos(\arcsin(h / (b/2 - y_1)))} - l \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-4)$$

由（4-4）可计算得到 20 个桌腿的所有开槽的长度。

（5）点  $M_i'$  坐标的计算，记其坐标为  $(x_i', y_i')$ ，则有：

$$x_i' = \frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2n} + \frac{b}{n}(i-1)\right) \quad y_i' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}a - y_1\right) + y_1 + M_i M_i' \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-5)$$

由（4-5）可计算得到 20 个桌腿开槽端点的坐标，由这些点可以模拟其边缘投影曲线形状。

（6）计算  $\beta_i$ 。由于有：

$$\cos \beta_i = \frac{A_1 A_i + A_i M_i^2 - A_i M_i'^2}{2 A_1 A_i \cdot A_i M_i'} = \frac{(y_i - y_1)^2 + A_i M_i^2 - l^2}{2(y_i - y_1) \cdot A_i M_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

所以得到：

$$\beta_i = \arccos\left(\frac{A_1 A_i + A_i M_i^2 - A_i M_i'^2}{2 A_1 A_i \cdot A_i M_i'}\right) = \frac{(y_i - y_1)^2 + A_i M_i^2 - l^2}{2(y_i - y_1) \cdot A_i M_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-5)$$

(7) 计算点  $A'_i$  的坐标  $(x'_i, y'_i, z'_i)$ ，即桌腿末端的坐标。

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{b}{2} - \left( \frac{b}{2n} + \frac{b}{n}(i-1) \right) = x \\ y'_i &= y_i + A_i A'_i \cos \beta_i \\ z'_i &= A_i A'_i \sin \beta_i \end{aligned}$$

其中第  $i$  根桌腿长:  $A_i A'_i = b/2 - y_i$ ，于是:

$$\begin{cases} x'_i = \frac{b}{2} - \left( \frac{b}{2n} + \frac{b}{n}(i-1) \right) = x_i \\ y'_i = y_i + \left( \frac{b}{2} - y_i \right) \cos \beta_i \\ z'_i = \left( \frac{b}{2} - y_i \right) \sin \beta_i \end{cases} \quad (4-6)$$

由式 (4-6) 确定的坐标点，可以模拟桌腿外边缘三维曲线。

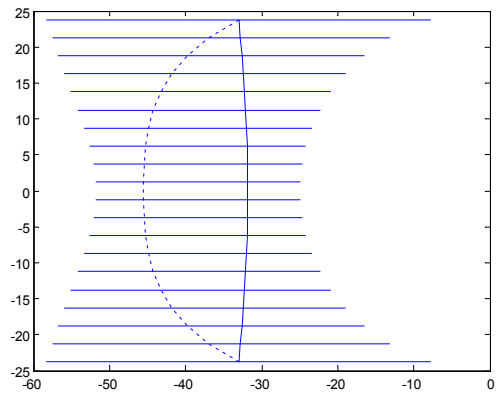
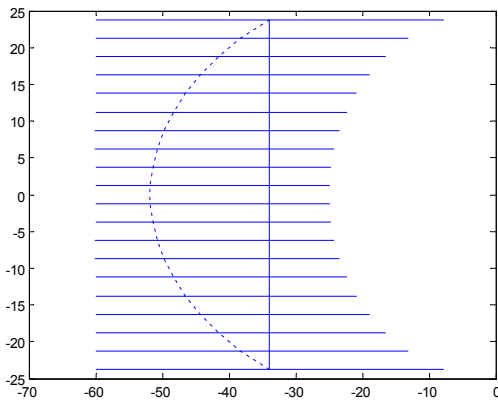
(8) 计算  $M_1 M_{20}$  绕  $A_1 A_{20}$  旋转方程。

因为有  $A_1 M_1 = (b - 2y_1)/4 + y_1$ ，于是旋转曲面方程为:

$$(y - y_1)^2 + z^2 = \left( \frac{1}{4}(b - 2y_1) + y_1 \right)^2$$

的  $\frac{1}{4}$  柱面。

以下各子图是在最外侧桌子腿与圆桌面的夹角  $\beta_1$  取不同值时， $n$  ( $n=20$ ) 条桌腿及开槽端点在水平面上投影的动态变化过程，也即反应出折叠桌的动态变化。



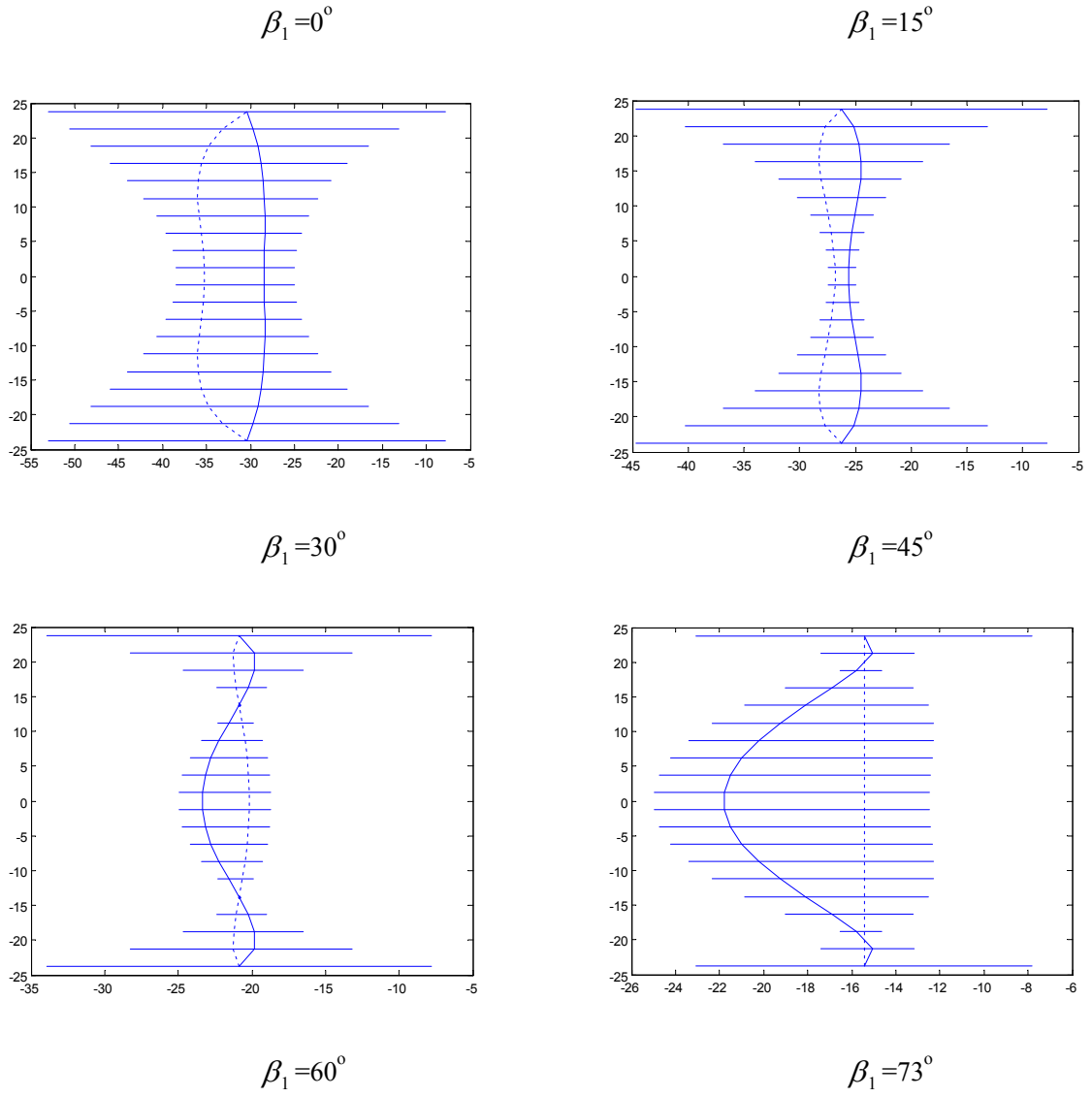
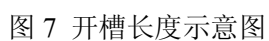


图 6  $n$  ( $n=20$ ) 条桌腿及开槽端点在水平面上投影的动态变化



$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$
0	4.3562	7.6633	10.3679	12.5920	14.3924	15.8025	16.8438	17.5307	17.8721
$c_1$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{15}$	$c_{16}$	$c_{17}$	$c_{18}$	$c_{19}$	$c_{20}$
17.8721	17.5307	16.8438	15.8025	14.3924	2.5920	0.3679	7.6633	4.3562	0

13

表 1: 折叠后桌腿末端  $A_i$  坐标

	$x_i$	$y_i$	$z_i$		$x_i$	$y_i$	$z_i$
$A_1$	-22.787	-23.75	-49.998	$A_{11}$	-12.328	1.25	-32.671
$A_2$	-17.140	-21.25	-46.662	$A_{12}$	-12.275	3.75	-33.0164
$A_3$	-14.384	-18.75	-43.411	$A_{13}$	-12.190	6.25	-33.717
$A_4$	-12.993	-16.25	-40.559	$A_{14}$	-12.115	8.75	-34.791
$A_5$	-12.353	-13.75	-38.181	$A_{15}$	-12.128	11.25	-36.268
$A_6$	-12.128	-11.25	-36.268	$A_{16}$	-12.353	13.75	-38.181
$A_7$	-12.115	-8.75	-34.791	$A_{17}$	-12.993	16.25	-40.559
$A_8$	-12.190	-6.25	-33.717	$A_{18}$	-14.384	18.75	-43.411
$A_9$	-12.275	-3.75	-33.016	$A_{19}$	-17.1400	21.25	-46.662
$A_{10}$	-12.328	-1.25	-32.671	$A_{20}$	-22.787	23.75	-49.998

以下方程是由表中坐标点，模拟出的桌腿外边缘曲线方程为：

$$z = 0.01538x^2 + 1.552 \times 10^{-17}xy + 0.6124x - 0.02949y^2 + 1.452 \times 10^{-16}y - 27.39$$

以下为最稳定的放置图（该图模拟了木条的形状，而不是用一根单线代表一根木条）

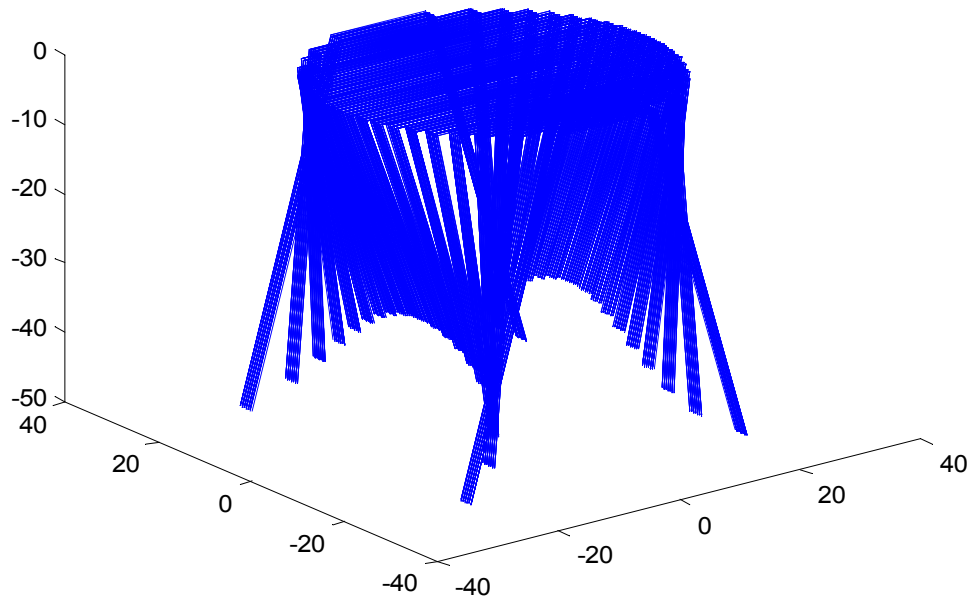


图 8 折叠后桌子的形状及桌脚边缘线模拟图

模型（1）中计算得到的  $\beta_i$  旋转角如公式（4-5）所示，其中  $\beta_1 + \beta_2 \approx 3.07$ ，与理论相加为  $\pi$  有点误差，实际原因应该为桌腿为偶数条，不是奇数条，不能取到中间点的值，因而有一点误差。所以从对



称角度看，桌面板设置为奇数块更好。

## 4.2 模型（2）：多性能指标优化的圆形折叠桌最优设计加工参数设定

对于模型（2）采取分层优化法，其基本思想是：

首先，由任意给定的折叠桌高度  $h$  和圆形桌面直径  $d$ ，加上美观性及至关重要的稳定性制约，讨论得出最小使用板材尺寸，钢筋位置、桌腿长度；其次，由讨论得出的理论板材尺寸看看哪种板材尺寸用来加工最省料。

先看对于产品的稳固性，由于折叠桌是空间可展几何体，因此从空间可展几何体的结构力学进行分析，如图 10（结构力学分析图）由于本几何体是对称的，因而考虑它放置稳定性情况下的正侧投影图 10，图中红色为支持力，蓝色为重力及其分力。当  $\angle \beta_1$  变动时，最中间桌腿  $A_i A'_i$  转过角  $\alpha$ （ $\angle A_1 A_i A'_i = \alpha$ ）， $\Delta A_1 M_1 A_i$  是转动扫过的投影面；利用几何体结构稳定性及力学平衡原理可以得出当  $\angle \beta > 90^\circ$ ，在  $\Delta A_1 M_1 A_i$  中，小边  $A_1 M_1$  承受了  $F_1$  大部分的分量，力矩大，显然不合理，相反情况  $\angle \alpha > 90^\circ$  类似，因而  $\angle \beta < 90^\circ$ ；力的平衡有使得其向受力均匀变化的趋势，故当可变化成为一个等腰三角形时最为稳固，于是可以将纵向最长桌面板与相应腿  $A_i A'_i$  的夹角余弦定义为稳固度，其最大值是  $l_1$ （纵向最长桌面板长/4）与  $l_2$ （钢筋及外侧桌腿与桌面相接处长  $A_1 M_1$ ）之比，于是由力学平衡原理及几何结构得  $\angle \beta < 90^\circ$ 。再者力的平衡有使得其向受力均匀变化的趋势，故当可变化成为一个等腰三角形时最为稳固，于是力学平衡与几何体对称性可以得出图中  $F_1$ 、 $F'_1$  及  $F_2$ 、 $F'_2$  应尽可能平行，大小相等时桌面可以稳定放置。于是由几何学知识可得

$$\beta_1 = \beta = \min_{1 \leq i \leq n-1} (\pi - \beta_i) < 90^\circ$$

最为稳定。

为了表达稳定性我们定义了一个稳定度  $\lambda$ ，令  $\lambda = \cos \alpha$ （旋转角的余弦值）。由三角函数性质可以知道当  $\alpha: \pi \rightarrow 0$  变化时， $\cos \alpha < 0$ ，此时桌子一定不稳定。当

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}d - y_1}{l} = \frac{\sqrt{A_1 A'_1{}^2 - h^2}}{A_1 A'_1}$$

时最为稳定。于是最大稳定度与外侧桌腿长和设计高度（与  $h$ 、 $d$  或  $d$ 、 $l$ ）有关。

再者，从美观角度，其桌面俯视图应该是四个支地脚构成四边形的最大内切圆。

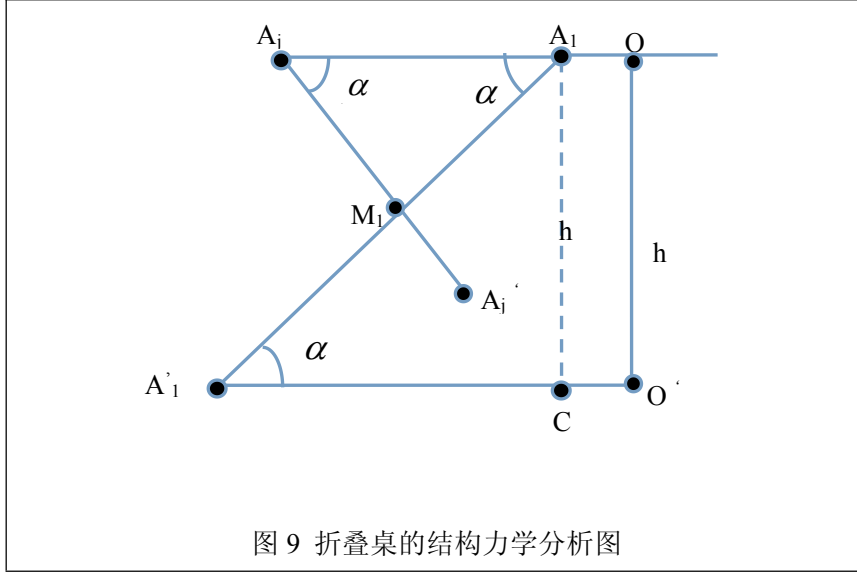


图 9 折叠桌的结构力学分析图

在上述讨论中，同时满足美观性、稳定性要求时，将几何体的一半作正投影如图 9 所示，其中：

$$O'A_1 = R = \frac{d}{2}, \quad A_1C = h, \quad OA_1 = y_1 = f(x_1),$$

$$A_1A_1' = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{CA_1'}{A_1A_1'} = \frac{\frac{1}{2}d - f(x_1)}{A_1A_1'}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}d - \frac{d}{4n}\right) = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(\frac{1}{2}d - \frac{d}{4n}\right)^2}$$

于是，面板长度 a 最小是：

$$a = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)^2} + 2f(x_1)$$

宽度  $b = d$ ，钢筋位置为：

$$A_1M_1 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)}{\frac{1}{2}d - f(x_1)} \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)^2}$$

于是，面板长度 a 是：

$$a = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)^2} + 2f(x_1), \quad f(x_1) = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{4n}\right)^2}$$

宽度： $b = d$ ，

$$\text{钢筋位置：} l = A_1M_1 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}d - f(x_1)\right)^2}$$

开槽长度:  $M_i M'_i = \sqrt{l^2 + (y_i - y_1)^2 - 2l(y_i - y_1)\cos(\arcsin(h/(d/2 - y_i)))} - l \quad i = 1, 2, \dots, n$

最后对性能指标“用材最少”采用分层优化的策略, 第一层先找到平板的尺寸(长为  $a$ , 宽为  $b$ ), 而这正好是在优化第二个优化指标“加工方便”时已经找到, 第二层优化则是在大平板(设尺寸为  $a_0 \times b_0$ )上切割最多块尺寸为  $a \times b$  的平板。

方法二: 考虑多目标规划问题

对于在加工过程中要求用料最省, 我们用矩形板材的面积最小为目标函数, 即  $S = ab$  值最小。对于加工方便的要求, 由于这类圆形桌面以矩形切割最为方便, 于是开槽长度最为麻烦。于是希望加工

开槽总长越短越好也即加工越方便, 因此以  $\sum_{i=1}^{20} m_i$  最小为目标的最优化问题。

由于厂家来说首先在生产桌子稳固性的前提下一定会追求加工方面和用料最省, 因此这时我们又可以考虑一个多目标规划问题, 为此利用理想点法(TOPSIS)构造多目标规划模型。涉及的模型参数如下:

(1) 平板尺寸长为  $a$ , 宽为  $b$  的矩形;

(2) 钢筋位置: 第 1 根木条(最外侧的木条)截断处  $A_1$  到钢筋穿过点长为  $l$ , 并且有:

$$l = \frac{1}{2}(\frac{b}{2} - y_1) + y_1;$$

(3) 桌面高度为  $h$ ;

(4) 第  $i$  根桌腿开槽长度为  $m_i = M_i M'_i$

(5) 桌面边缘曲线设为  $y = f(x)$ ;

(6) 外侧桌腿长为  $c = A_1 A'_1$ , 桌腿条数为  $2n$ ;

(7) 旋转  $\theta$  角度且  $\theta = \beta_1$ ;

(8) 桌面直径为  $d$ ;

### “材料最省”模型的建立

由上面假设, 于是得以下约束条件:

$$(1) \text{ 开槽长度 } m_i = M_i M'_i = \sqrt{l^2 + (y_i - y_1)^2 - 2l \cdot (y_i - y_1) \cos \theta} - l$$

$$(\text{即: } (m_i + l)^2 = l^2 + (f(x_i) - f(x_1))^2 - 2l(f(x_i) - f(x_1)) \cos \theta$$

$$(m_i + l)^2 = l^2 + (f(x_i) - f(x_1))^2 - 2l(f(x_i) - f(x_1)) \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{l^2 + (f(x_i) - f(x_1))^2 - (m_i + l)^2}{2l(f(x_i) - f(x_1))} \quad )$$

$$(2) \beta_1 = \theta = \arcsin \frac{h}{\frac{1}{2}(a-2f(x_i))}$$

$$(3) x_i \leq \frac{b}{2}(\frac{b}{2n} + \frac{b}{n}(i-1))$$

$$(4) \max f(x_0) < l < \frac{1}{2}(a-2f(x_i))$$

$$(5) 0 < m < \frac{1}{2}(a-2f(x_i)) - l$$

$$(6) \frac{\frac{1}{2}d - y_1}{l} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c} \quad (\frac{\frac{1}{2}d - y_1}{l} = \frac{\sqrt{A_1 A_1'^2 - h^2}}{A_1 A_1'}) , \quad (c = \frac{1}{2}(a-2f(x_i)))$$

目标函数：

$$(1) \min S \quad (S = ab \text{ 为板材的面积});$$

$$(2) \min(M = \sum_{i=1}^{2n} m_i) \quad (\text{加工方便即开槽长度之和最小});$$

构造多目标规划模型步骤：首先，求每个目标函数的最优解  $\xi_i$ ；其次，构造多目标函数  $\psi$ ，即：

$$\begin{cases} \min \psi = \sqrt{(S - \xi_1)^2 + (M - \xi_2)^2} \\ st: (1) \text{---}(7) \end{cases}$$

通过编制程序，就可以进行求解了。

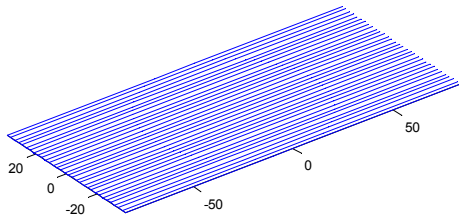
实例求解：

当对于桌高 70 cm，桌面直径 80 cm 的情形，确定最优设计加工参数为：

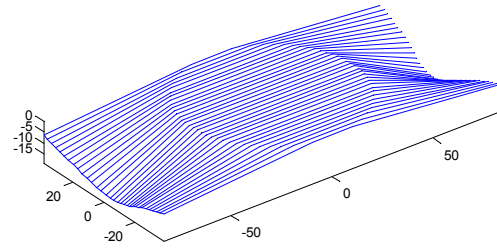
通过以上理论分析，可以求出平板尺寸为 167cm×80cm、钢筋位置在桌子腿的中点，并且中点距离末端的长度为 37.8469cm，同时确定了 32 根桌腿的开槽长度，具体见如下表 2 所示，而 8 个动态变化过程通过 MATLAB 模拟的结果如图 10 所示。

表 2 桌高 70 cm，桌面直径 80 cm 的情形下开槽长度

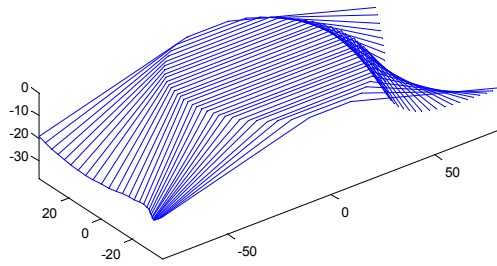
C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	C <sub>6</sub>	C <sub>7</sub>	C <sub>8</sub>
0	4.3020	7.7954	10.8874	13.6726	16.1857	18.4428	20.4537
C <sub>9</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>13</sub>	C <sub>14</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>16</sub>
22.2253	23.7635	25.0729	26.1578	27.0215	27.6668	28.0959	28.3100
C <sub>17</sub>	C <sub>18</sub>	C <sub>19</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>21</sub>	C <sub>22</sub>	C <sub>23</sub>	C <sub>24</sub>
28.3100	28.0959	27.6668	27.0215	26.1578	25.0729	23.7635	22.2253
C <sub>25</sub>	C <sub>26</sub>	C <sub>27</sub>	C <sub>28</sub>	C <sub>29</sub>	C <sub>30</sub>	C <sub>31</sub>	C <sub>32</sub>
20.4537	18.4428	16.1857	13.6726	10.8874	7.7954	4.3020	0



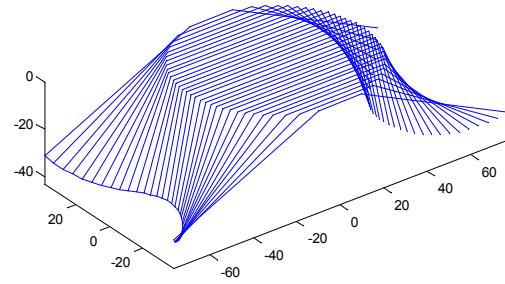
$$\beta_1 = 0^\circ$$



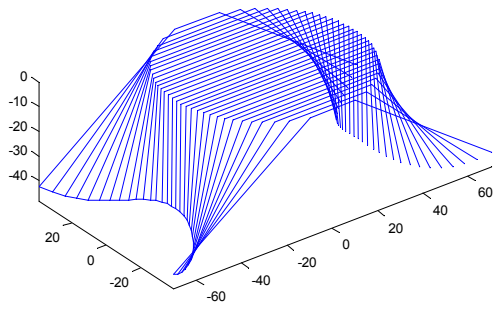
$$\beta_1 = 5^\circ$$



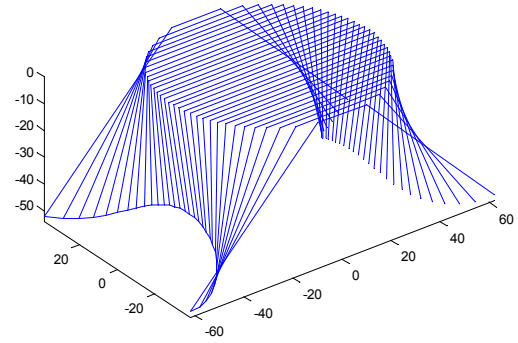
$$\beta_1 = 15^\circ$$



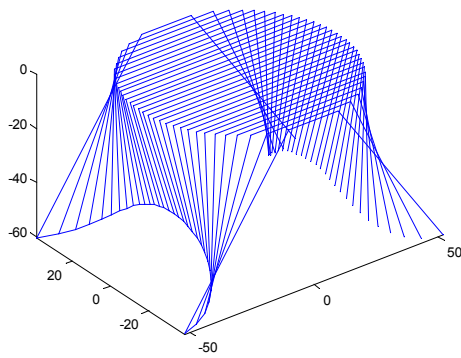
$$\beta_1 = 25^\circ$$



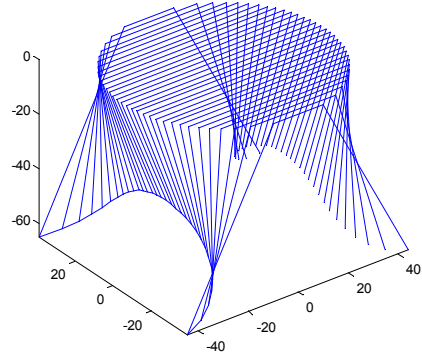
$$\beta_1 = 35^\circ$$



$$\beta_1 = 45^\circ$$



$$\beta_1 = 55^\circ$$



$$\beta_1 = 62.2686^\circ$$

图 10 桌高 70 cm，桌面直径 80 cm 的情形下所设计折叠桌的动态变化图

### 4.3 模型（3）：面向客户定制的折叠桌最优参数设定

由于要求公司计划开发一种折叠桌设计软件，根据客户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数，使得生产的折叠桌尽可能接近客户所期望的形状。

由前述分析，视频展示的是一个可变形状几何体的旋转变化过程；但是在这个旋转变化过程中，有几个重要特点：其一是钢筋及外侧桌腿所在平面绕其与桌面相接处直线旋转，其他腿及钢筋在平面绕其相应与桌面相接断点处联动旋转，主旋转角（外侧桌腿与桌面）为核心参数；其二是每条桌腿旋转所在平面都是相互平行的，不会发生扭转！腿长及桌面板长没有发生变化，变化的仅仅是各腿绕其相应与桌面相接断点处旋转的角度和除支地腿外其余腿在开的槽里的运动（拉升或缩短）。关于钢筋位置，其在放平时一定被拉紧卡牢固呈直线。所以得出桌面边缘线的形状大小影响桌脚边缘线的大致形状；由主旋转角（外侧桌腿与桌面）及开的槽长为核心参数，建立描述此折叠桌动态变化过程的模型。

而相关参数计算与问题二类似，高度仍是条件，变化的仅仅是直径；于是将客户要求的桌面边缘线的形状大小  $f(x)$ ，作正投影得到其最大长度  $r$ （类似于问题 2 的半径  $\frac{d}{2}$ ， $r = \frac{d}{2}$ ）、最大宽度  $b'$

（以要开条作为桌腿的作为宽，以确定作多少条桌腿，处理方法同问题 1），关于钢筋位置，其在放平时一定被拉紧卡牢固。于是可得相关参数计算公式如下：

$$\text{面板长度是： } a' = 2\sqrt{h^2 + (r - f(x_1))^2} + 2f(x_1),$$

$$f(x_1) = \text{客户要求的边缘形状曲线解析式}$$

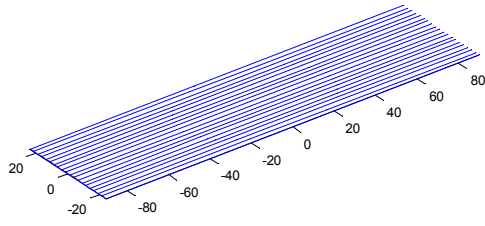
面板宽度：  $b' = 2b$  ,

$$\text{钢筋位置： } l = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + (r - f(x_1))^2}, \quad y_i = f(x_i)$$

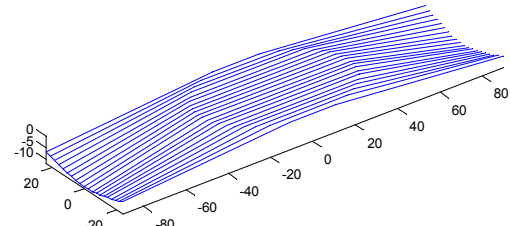
$$\text{开槽长度： } M_i M'_i = \sqrt{l^2 + (y_i - y_1)^2} - 2l(y_i - y_1) \cos(\arcsin(h/(r - y_i))) - l \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由于客户任意设定折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，增加了设计难度，但通过模型（2）中的求解策略，当桌面形状的方程和桌面高度确定时，也可确定相关的参数。

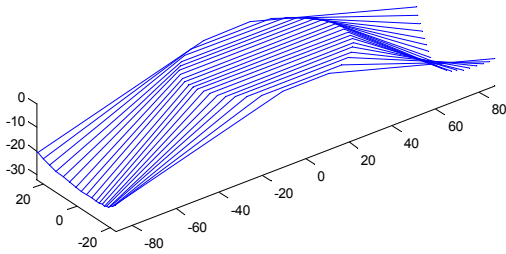
以下给出一个自己设计的创意平板折叠桌，根据我们建立的数学模型，以椭圆型折叠桌为应用实例进行了验证， $\frac{x^2}{35^2} + \frac{y^2}{25^2} = 1$ ，即椭圆形的长半径  $a$  为 35cm，短半径  $b$  为 25cm，桌面高度为 75.6162cm 时，确定的最优设计加工参数分别是：平板尺寸为 167cm×80cm、钢筋位置距离触地末端的长度为 39.5356cm，同时确定了 20 根桌腿的开槽长度，并通过 MATLAB 模拟，给出了该参数下折叠桌的 8 个动态变化过程图如图 11 所示。



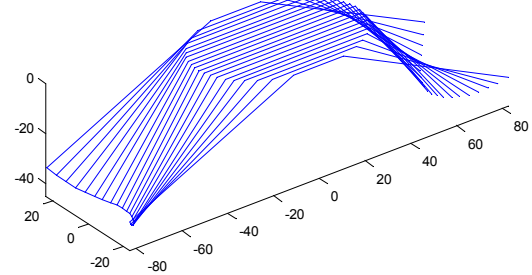
$$\beta_1 = 0^\circ$$



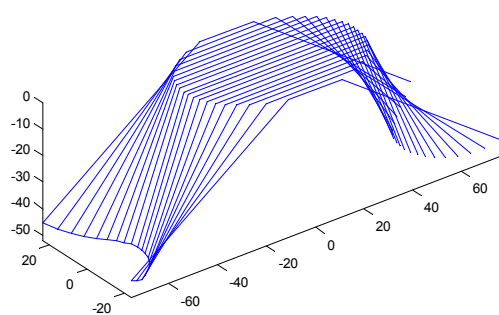
$$\beta_1 = 5^\circ$$



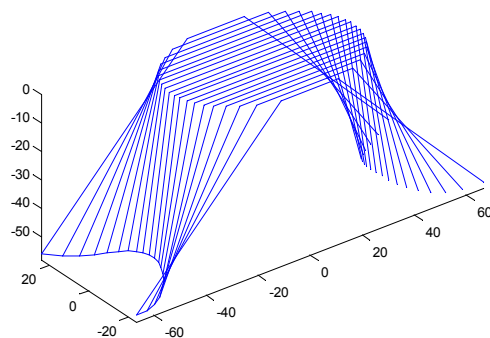
$$\beta_1 = 15^\circ$$



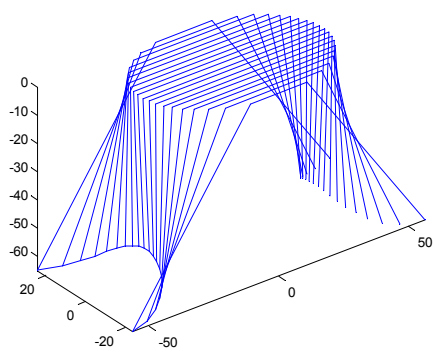
$$\beta_1 = 25^\circ$$



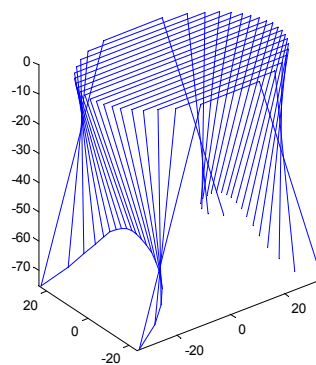
$$\beta_1 = 35^\circ$$



$$\beta_1 = 45^\circ$$



$$\beta_1 = 55^\circ$$



$$\beta_1 = 73^\circ$$

图 10 椭圆形的长半径  $a$  为 35cm，短半径  $b$  为 25cm，桌面高度为 75.6162cm 时所设计折叠桌的动态变化图

## 5. 模型的评价与改进方向

### 5.1 模型的评价

本文所建立模型的优点是：

所建立的模型简单易懂，建立过程自然流畅，并随着问题的深入而不断加以改进；通过对结果进行分析，可知本文的模型精确度较高；

综合运用了数学、物理学、几何学等方面的知识，可以合理地解决折叠桌的最优设计加工参数设定，能够模拟折叠桌的动态变化。还将数学抽象思维与空间变换思维运用于具体问题的分析与解决



中，力图找出更为契合的最优化模型，具有较强的实践意义。

模型的缺点是：

（1）本文研究问题时做了一定的理想假设，较多地运用数学与空间几何等知识，对一些物理受力上的细节问题未进行详细研究，有待于进一步学习和探讨；

（2）在模型二只考虑了稳固性能够达到最佳状态时的情况，现实生活中是可能出现无法达到最优稳固值的情形。

总体来说，本文建立的模型层层深入，可以较好地解决题目要求的内容。

## 5.2 模型的改进与推广

（1）对折叠桌进行更为细致的物理研究，通过更详细受力的分析来使模型更贴近实际情况；

（2）根据实际情况适当改变主目标，综合考虑更多特殊情况下的最优方案。

## 参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 姜启源, 谢金星. 数学建模案例选集[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [3] 黄廷祝. 线性代数与空间解析几何(第3版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [4] 王焕定. 结构力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [5] 胡于进, 王璋奇. 有限元分析及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009
- [6] 周凯, 宋军全, 邬学军. 数学建模竞赛入门与提高[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2011.
- [7] 谭汉松, 彭迎春. 板材最优切割算法的设计与实现[J]. 计算机工程与应用, 2003, (18): 95-96.
- [8] 苏金明, 张莲花, 刘波. MATLAB 工具箱应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- [9] 蔡旭晖, 刘卫国, 蔡立燕. MATLAB 基础与应用教程[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.

## 附件（程序代码）

说明：代码均使用 MATLAB 实现，一般由主文件调用若干函数完成计算，所有代码列举如下，具体的功能可参考代码注释。

### **plothwc.m**

%该函数绘出折叠桌的示意图，要调用到 theta 函数、plotone 函数

clear;

%首先各木条的桌面那段长度，以圆心过木条截面的中心来算

d=23.75:-2.5:1.25;

L=2\*sqrt(25\*25-d.\*d); %求各木条在桌面的那一段长度

originjiaodu=73.32; %是给定的角度值（桌子为平板时，值为 0）

origintheta=(180-originjiaodu)/180\*pi; %求弧度值（木条变为三段时，形成的夹角，当 originjiaodu 为 0 时，该值为 pi,当 originjiaodu 为 73.23 时，该值为 1.8618）

%origintheta=1.8618; %是给定的角值（最外面那根木条，如 1.8618）

theta1=theta(origintheta);

dotAA=[]; %dotAA 用来存放各木条一端端点在三维坐标系中的坐标

%下面该循环画出 y 轴负坐标的十根折线

instance=-23.75:2.5:-1.25;%以桌面圆心为三维坐标原点，该向量元素依次为各木条中间段在 y 轴的坐标

for i=1:10

dotA=plotone(120,L(i),theta1(i),instance(i));

dotAA=[dotAA;dotA];

hold on

end

%下面该循环画出 y 轴正坐标的十根折线

instance1=-instance;

for i=10:-1:1

dotA=plotone(120,L(i),theta1(i),instance1(i));

```

dotAA=[dotAA;dotA];
end

plot3(dotAA(:,1),dotAA(:,2),dotAA(:,3));    %画出各木条一端点空间中的连线

%如果需要的话，可用下面这一行拟合该连线（用三维曲线）
threecf(dotAA)

%以桌子四脚画一个三维平面
zx=dotAA(1,3);
[xx,yy]=meshgrid(-70:1:70,-70:1:70);
zz=zx*ones(size(xx));
mesh(xx,yy,zz);
hold off
axis equal

theta 函数
%x 表示最外面那根木条的夹角,y 一个向量，其中每个元素依次各根木条的夹角
function y=theta(x)
d=23.75:-2.5:1.25;
L=2*sqrt(25*25-d.*d);
y=zeros(1,10);
y(1)=x;
b=(120-L(1))/4;    %b 表示最外面木条两端长度的一半
for i=2:10
    a=(L(i)-L(1))/2;    %a 表示第 i 根木条与第 1 根木条长度差的一半
    %以 a,b 为两边，pi-x 为夹角组成一个三角形，下面求三角形中 b 边所对应角的大小
    c=sqrt(a*a+b*b-2*a*b*cos(pi-x));
    temp=acos((a*a+c*c-b*b)/2/a/c);    %temp 存放 b 边所对应角角度值
    y(i)=temp;
end

```

### plotone 函数

%totalen 表示木条总长度。middlelen 表示中间一段长度，thearo 表示木条成为三截棍的夹角，instance 表示各木条中间段在 y 轴的坐标

%返回值 dotA 为木条一端的坐标

%以桌面圆心为坐标原点

%功能：用三段折线画出一根木条在空间的位置

```
function dotA=plotone(totalen,middlelen,thearo,instance)
```

```
a=(120-middlelen)/2;      %a 为木条两端的长度
```

```
height=a*sin(pi-thearo); %height 为该木条的垂直高度
```

```
%求三点的 X 轴坐标
```

```
x(1)=-1*(middlelen/2+a*cos(pi-thearo));
```

```
x(2)=-1*middlelen/2;
```

```
x(3)=-x(2);
```

```
x(4)=-x(1);
```

```
%求三点的 y 轴坐标
```

```
y(1)=instance;
```

```
y(2)=y(1);
```

```
y(3)=y(1);
```

```
y(4)=y(1);
```

```
%求三点的 z 轴坐标
```

```
z(1)=-height;
```

```
z(2)=0;
```

```
z(3)=0;
```

```
z(4)=-height;
```

```
dotA=[x(1),y(1),z(1)];      %该根木条一端点的三维坐标
```

```
plot3(x,y,z)                %画该木条所表示的三段折线
```

### **plothwc32.m**

%该函数绘出折叠桌的示意图，要调用到 theta32 函数、plotone32 函数

clear;

%首先各木条的桌面那段长度，以圆心过木条截面的中心来算

d=(16\*2.5-1.25):-2.5:1.25;

L=2\*sqrt(40\*40-d.\*d);                      %求各木条在桌面的那一段长度

originjiaodu=0;                              %是给定的角度值（桌子为平板时，值为 0）

origintheta=(180-originjiaodu)/180\*pi;                      %求弧度值（木条变为三段时，形成的夹角，当

originjiaodu 为 0 时，该值为 pi,当 originjiaodu 为 62.2686 时，该值为 2.0548）

%origintheta=1.8618;                      %是给定的角值（最外面那根木条，如 1.8618）

theta1=theta32(origintheta);

dotAA=[];    %dotAA 用来存放各木条一端端点在三维坐标系中的坐标

%下面该循环画出 y 轴负坐标的 16 根折线

instance=-(16\*2.5-1.25):2.5:-1.25;%以桌面圆心为三维坐标原点，该向量元素依次为各木条中间段在 y 轴的坐标

for i=1:16

    dotA=plotone32(167,L(i),theta1(i),instance(i));

    dotAA=[dotAA;dotA];

    hold on

end

%下面该循环画出 y 轴正坐标的十根折线

instance1=-instance;

for i=16:-1:1

    dotA=plotone32(167,L(i),theta1(i),instance1(i));

    dotAA=[dotAA;dotA];

end

plot3(dotAA(:,1),dotAA(:,2),dotAA(:,3));                      %画出各木条一端点空间中的连线

%如果需要的话，可用下面这一行拟合该连线（用三维曲线）

```
%threecf(dotAA)
```

%以桌子四脚画一个三维平面

```
%zx=dotAA(1,3);
```

```
%[xx,yy]=meshgrid(-70:1:70,-70:1:70);
```

```
%zz=zx*ones(size(xx));
```

```
%mesh(xx,yy,zz);
```

```
hold off
```

```
axis equal
```

### **theta32 函数**

%x 表示最外面那根木条的夹角,y 一个向量，其中每个元素依次各根木条的夹角

```
function y=theta32(x)
```

```
d=(16*2.5-1.25):-2.5:1.25;
```

```
L=2*sqrt(40*40-d.*d);
```

```
y=zeros(1,16);
```

```
y(1)=x;
```

```
b=(167-L(1))/4;    %b 表示最外面木条两端长度的一半
```

```
for i=2:16
```

```
    a=(L(i)-L(1))/2;    %a 表示第 i 根木条与第 1 根木条长度差的一半
```

%以 a,b 为两边, pi-x 为夹角组成一个三角形，下面求三角形中 b 边所对应角的大小

```
c=sqrt(a*a+b*b-2*a*b*cos(pi-x));
```

```
temp=acos((a*a+c*c-b*b)/2/a/c);    %temp 存放 b 边所对应角角度值
```

```
y(i)=temp;
```

```
end
```

### **plotone32 函数**

%totalen 表示木条总长度。middlelen 表示中间一段长度，thearo 表示木条成为三截棍的夹角，instance

表示各木条中间段在 y 轴的坐标

%返回值 dotA 为木条一端的坐标

%以桌面圆心为坐标原点

%功能：用三段折线画出一根木条在空间的位置

```
function dotA=plotone32(totallen,middlelen,thearo,instance)
```

```
a=(totallen-middlelen)/2;          %a 为木条两端的长度
```

```
height=a*sin(pi-thearo); %height 为该木条的垂直高度
```

```
%求三点的 X 轴坐标
```

```
x(1)=-1*(middlelen/2+a*cos(pi-thearo));
```

```
x(2)=-1*middlelen/2;
```

```
x(3)=-x(2);
```

```
x(4)=-x(1);
```

```
%求三点的 y 轴坐标
```

```
y(1)=instance;
```

```
y(2)=y(1);
```

```
y(3)=y(1);
```

```
y(4)=y(1);
```

```
%求三点的 z 轴坐标
```

```
z(1)=-height;
```

```
z(2)=0;
```

```
z(3)=0;
```

```
z(4)=-height;
```

```
dotA=[x(1),y(1),z(1)];          %该根木条一端点的三维坐标
```

```
plot3(x,y,z)                    %画该木条所表示的三段折线
```

### **plotellipse.m**

%该函数绘出折叠桌（椭圆形桌面）的示意图，要调用到 thetaellipse 函数、plotonellipse 函数

%假定木条的宽度为 2.5cm，椭圆的短直径 ellb 应为木条宽度的偶数倍

%totallen 表示木条的总长度,ella 表示椭圆的长直径,ellb 表示椭圆的短直径

%示例：plotellipse(180,100,50)

```

function x=plotellipse(totallen,ella,ellb)
coun=ellb/2.5;           %计算所用木条的总根数，应为偶数
%首先各木条的桌面那段长度，以圆心过木条截面的中心来算
d=(2.5*coun/2-1.25):-2.5:1.25;
L=2*sqrt((1-4*d.*d/ellb/ellb)*ella*ella/4)           %求各木条在桌面的那一段长度
originjiaodu=73;           %是给定的角度值（桌子为平板时，值为0）
origintheta=(180-originjiaodu)/180*pi;           %求弧度值（木条变为三段时，形成的夹角，当
originjiaodu 为 0 时，该值为 pi,当 originjiaodu 为 73.23 时，该值为 1.8618）

%origintheta=2;           %是给定的角值（最外面那根木条，如 1.8618）
theta1=thetaellipse(totallen,origintheta,L,coun/2);

dotAA=[];   %dotAA 用来存放各木条一端端点在三维坐标系中的坐标

%下面该循环画出 y 轴负坐标的 coun/2 根折线
instance=- (2.5*coun/2-1.25):2.5:-1.25;%以桌面圆心为三维坐标原点，该向量元素依次为各木条中间段在
y 轴的坐标
for i=1:coun/2
    dotA=plotonellipse(totallen,L(i),theta1(i),instance(i));
    dotAA=[dotAA;dotA];
    hold on
end

%下面该循环画出 y 轴正坐标的 coun/2 根折线
instance1=-instance;
for i=coun/2:-1:1
    dotA=plotonellipse(totallen,L(i),theta1(i),instance1(i));
    dotAA=[dotAA;dotA];
end

plot3(dotAA(:,1),dotAA(:,2),dotAA(:,3));           %画出各木条一端点空间中的连线

```



```
%如果下面用三维曲线拟合该连线
%threecf(dotAA)
%view(0,30)
%以桌子四脚画一个三维平面
%zx=dotAA(1,3);
%[xx,yy]=meshgrid(-90:1:90,-90:1:90);
%zz=zx*ones(size(xx));
%mesh(xx,yy,zz);

hold off
axis equal
```

### **thetaellipse 函数**

%x 表示最外面那根木条的夹角,y 一个向量, 其中每个元素依次各根木条的夹角,L 为各木条在桌面的那一段长度, cou 表示半边椭圆桌木条数,

%totalx 表示木条总长度

```
function y=thetaellipse(totalx,x,L,cou)
```

```
y=zeros(1,cou);
y(1)=x;
b=(totalx-L(1))/4;    %b 表示最外面木条两端长度的一半
for i=2:cou
    a=(L(i)-L(1))/2;    %a 表示第 i 根木条与第 1 根木条长度差的一半
    %以 a,b 为两边, pi-x 为夹角组成一个三角形, 下面求三角形中 b 边所对应角的大小
    c=sqrt(a*a+b*b-2*a*b*cos(pi-x));
    temp=acos((a*a+c*c-b*b)/2/a/c);    %temp 存放 b 边所对应角角度值
    y(i)=temp;
end
```

### **plotonellipse 函数**

%totalen 表示木条总长度。middlelen 表示中间一段长度, thearo 表示木条成为三截棍的夹角, instance 表示各木条中间段在 y 轴的坐标

%返回值 dotA 为木条靠近地面一端的坐标

%以桌面圆心为坐标原点

%功能：用三段折线画出一根木条在空间的位置

```
function dotA=plotonellipse(totalx,middlelen,thearo,instance)
```

```
a=(totalx-middlelen)/2;          %a 为木条两端的长度
```

```
height=a*sin(pi-thearo); %height 为该木条的垂直高度
```

%求三点的 X 轴坐标

```
x(1)=-1*(middlelen/2+a*cos(pi-thearo));
```

```
x(2)=-1*middlelen/2;
```

```
x(3)=-x(2);
```

```
x(4)=-x(1);
```

%求三点的 y 轴坐标

```
y(1)=instance;
```

```
y(2)=y(1);
```

```
y(3)=y(1);
```

```
y(4)=y(1);
```

%求三点的 z 轴坐标

```
z(1)=-height;
```

```
z(2)=0;
```

```
z(3)=0;
```

```
z(4)=-height;
```

```
dotA=[x(1),y(1),z(1)];          %该根木条一端点的三维坐标
```

```
plot3(x,y,z)                    %画该木条所表示的三段折线
```